Leçon 245 : Fonctions d'une variable complexe. Exemples et appli^{s}.

Beck Malick Peyré
Touvel

I - Séries entières

Définition 1.1 On appelle série entière toute série de fonctions $\sum_n f_n$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto a_n z^n$ où $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$.

Lemme 1.2. (Abel) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $z_0 \in \mathbb{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée alors la série $\sum a_n z^n$ est normalement convergente sur tout disque $\bar{D}(0,r)$ pour $r < |z_0|$.

Définition - Proposition 1.3 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. En considérant $R \in \overline{\mathbb{R}_+}$ défini par $R := \sup\{r > 0 \mid (a_n r^n)_n \text{ soit bornée}\}$, on obtient alors les propriétés suivantes :

(i) pour $z \in D(0,R)$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente

(ii) pour $z \in \mathbb{C}$, si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ est divergente

(iii) pour $r < R$, la série $\sum a_n z^n$ est normalement (donc uniformément) convergente sur $\bar{D}(0,r)$

On dit alors que R est le rayon de convergence de la série entière.

Remarque 1.4 Sur la sphère $S(0,R)$ il n'y a pas de comportement général notable.

Exemples 1.5

- $\sum z^n$ est une série entière de rayon de convergence 1
- $\sum (-1)^n z^n$ est une série entière de rayon de convergence 1 qui converge sur $\mathcal{D}_1$
- $\sum \frac{z^n}{n^n}$ est une série entière de rayon de convergence infini

Proposition 1.6. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On obtient alors :

(i) si $(\sqrt[n]{|a_n|})_n$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ alors $R = \frac{1}{\ell}$ (critère de Cauchy)

(ii) si $a_n \neq 0$ à partir d'un rang et si la suite $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ alors $R = \frac{1}{\ell}$ (critère de d'Alembert)

Proposition 1.7 Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On a alors :

(i) La série $\sum (a_n + b_n) z^n$ a un rayon de convergence $\rho_1 \geq \min(R_a, R_b)$ avec égalité si $R_a \neq R_b$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ là où elle est convergente

(ii) La série $\sum d_n z^n$, avec $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, a un rayon de convergence $\rho_2 \geq \min(R_a, R_b)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} d_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

Proposition 1.8 Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Alors la somme de la série entière est continue sur $D(0,R)$

Définition - proposition 1.9 On appelle série (entière) dérivée de $\sum a_n z^n$ la série entière $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$. De plus, elle a même rayon de convergence que $\sum a_n z^n$.

Proposition 1.10 Dans le disque de convergence, la fonction somme d'une série entière est indéfiniment dérivable et ses dérivées successives sont les fonctions sommes des séries entières dérivées successives.

Exemple fondamental 1.11

La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ définit une fonction somme définie sur $\mathbb{C}$ et notée exp.

De plus :

- $\forall z \in \mathbb{C}$, $\exp'(z) = \exp(z)$
- $\forall \omega, z \in \mathbb{C}$, $\exp(z + \omega) = \exp(z)\exp(\omega)$
- exp induit un homomorphisme de groupes $(\mathbb{C}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ continu, surjectif et non injectif

II - Holomorphie et analyticité

Définition 2.1 Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est $\mathbb{C}$-dérivable en $z_0 \in U$ si la quantité $\frac{f(z_0+z) - f(z_0)}{z}$ admet une limite lorsque $z \neq 0$ tend vers 0. On note le cas échéant, $f'(z_0)$ la limite et on dit que c'est la dérivée de f en z_0.

On dit que f est holomorphe sur U, noté $f \in \mathcal{H}(U)$, si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point de U.

Exemples 2.2.

- les fonctions polynomiales sont holomorphe sur $\mathbb{C}$
- la fonction $z \longmapsto \bar{z}$ n'est pas dérivable en 0

Proposition 2.3 Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. On considère $z_0 \in \mathbb{C}$, alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en z_0

(ii) f est différentiable en (x_0, y_0) et $\partial_x f(x_0, y_0) + i\,\partial_y f(x_0, y_0) = 0$

De plus, le cas échéant, on a alors $f'(z_0) = \partial_x f(x_0, y_0)$.

Application 2.4 Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{H}(U)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f constante sur U

(ii) $\mathrm{Re}(f)$ constante sur U

(iii) $\mathrm{Im}(f)$ constante sur U

(iv) $|f|$ constante sur U

(v) $\bar{f} \in \mathcal{H}(U)$

Remarque 2.5 Dans (ii), la condition de différentiabilité de f est nécessaire.

Contre-exemple 2.6

$z = x + iy \longmapsto \sqrt{|xy|}$

Définition 2.7 Soient U ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est analytique sur U si pour tout $z_0 \in U$, il existe $r > 0$ et $(a_n)_n \subset \mathbb{C}$ tels que pour tout $z \in D(z_0, r)$, $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$. On note $f \in \mathcal{A}(U)$.

Exemple 2.8

La fonction $z \longmapsto \frac{1}{z}$ est analytique sur $\mathbb{C}^*$

Théorème 2.9 Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ vérifie que sa somme est analytique sur $D(0, R)$.

Théorème 2.10 (Principe de prolongement analytique) Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(U)$ et $z_0 \in U$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f \equiv 0$ sur U

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(z_0) = 0$

Théorème 2.11 Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et $f \in \mathcal{A}(U)$. Si $\{z \mid f(z) = 0\}$ possède un point d'accumulation dans U, f est identiquement nulle sur U.

Contre-exemple 2.12

$z \longmapsto \sin \frac{1}{z}$ 0 est un point d'accumulation de $\{z \mid f(z) = 0\}$ mais f n'est pas développable en série entière en 0.

Définition 2.13 Soient U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{A}(U)$ non identiquement nulle et $z_0 \in U$ un zéro de f. Il existe un unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ et pour $i \in [\![0, k-1]\!]$, $f^{(i)}(z_0) = 0$.

On dit que k est l'ordre du zéro z_0 de f.

Exemple 2.14

$z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \longmapsto \frac{1}{(z-2)^2}$, 2 est un zéro d'ordre 2

+ thm holomorphie + lemme des lacunes de Hadamard

III -

Définition 3.1. Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ un chemin et f une fonction continue sur $\mathrm{Im}\,\gamma$. L'intégrale de f sur γ est définie par : $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$.

Définition - Théorème 3.2 Soient γ un lacet et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Im}\,\gamma$. On définit l'indice de z par rapport à γ par $\mathrm{ind}_\gamma(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w - z}$.

De plus, $z \longmapsto \mathrm{ind}_\gamma(z)$ est continue à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

Exemple 3.3 Pour $\gamma = C(z_0, r)$, si $|z - z_0| < r$ alors $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 1$ et si $|z - z_0| > r$, $\mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$.

Théorème 3.4 Soient U ouvert de $\mathbb{C}$ et f continue sur U. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f admet une primitive sur U

(ii) pour tout lacet γ tracé dans U, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$

Application 3.5 Soient $n \in \mathbb{Z}$ et γ un lacet. Alors $\int_\gamma z^n\,dz = 0$ lorsque $n \geq 0$ et lorsque $n < -1$ si $\mathrm{Im}\,\gamma \subset \mathbb{C}^*$.

Théorème 3.6 (Cauchy) - Admis Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, et f une fonction continue sur U, holomorphe sur $U \setminus \{z_0\}$. Alors pour tout lacet γ tracé dans U, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Corollaire 3.7 (Formule de Cauchy) Soient U un ouvert étoilé de $\mathbb{C}$ et γ un lacet tracé dans U. Si $z \in U \setminus \operatorname{Im}\gamma$ et $f \in \mathcal{H}(U)$, alors : $f(z)\operatorname{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw$.

Conséquence 3.8 Une fonction holomorphe sur U ouvert étoilé alors f est analytique sur U.

Proposition 3.9 (Inégalité de Cauchy) Soient $R > 0$ et $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ alors pour tout $R \in]0,R[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{1}{R^n} \sup_{C(0,R)} |f|$.

Application 3.10 (Théorème de Liouville) Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.

Application 3.11 (Théorème de d'Alembert) Tout polynôme à coefficients complexes non constant admet une racine dans $\mathbb{C}$.